ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ MINH PHƯỢNG

NGHIỆM HỮU TỶ CỦA ĐA THỨC NGUYÊN VÀ CÁC ĐẠO HÀM

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. ĐOÀN TRUNG CƯỜNG

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Mở đầu

Một câu hỏi được nghiên cứu trong số học là tìm các đa thức nguyên sao cho đa thức đó và các đạo hàm của nó có nghiệm hữu tỷ. Các trường hợp riêng của bài toán này xuất hiện trong rất nhiều tình huống khác nhau trong toán học. Một trong số những phát biểu của bài toán đó như sau:

Cho một tấm bìa hình vuông có cạnh $A \in \mathbb{N}$, tại các góc của nó ta cắt bốn hình vuông nhỏ bằng nhau. Sau đó gấp tấm bìa thành một hình hộp với mặt trên hở. Hỏi phải cắt các hình vuông thế nào để thể tích của hình hộp nhận được là lớn nhất?

Thực tế ta có thể ta xét bài toán chặt hơn là phải tìm thể tích lớn nhất sao cho các cạnh của khối hộp là các số hữu tỷ. Điều này dẫn đến câu hỏi sau: có thể lấy tấm bìa hình chữ nhật với kích thước các cạnh nguyên sao cho thể tích là lớn nhất? Giả sử các cạnh của hình chữ nhật lần lượt là $A \geq B > 0$. Khi đó thể tích của khối hộp là

$$V = x\left(2x - A\right)\left(2x - B\right), 0 < x < \frac{B}{2}.$$

Câu hỏi trên dẫn đến nghiên cứu các đa thức bậc ba có 3 nhân tử phân biệt với hệ số nguyên sao cho đạo hàm đầu tiên có hai nghiệm phân biệt là các số hữu tỷ.

Mục tiêu của luận văn này là khảo sát một số trường hợp riêng của bài toán tìm các đa thức nguyên sao cho đa thức đó và các đạo hàm của nó có nghiệm hữu tỷ. Cụ thể chúng tôi trình bày lại các kết quả của G. Convertito và D. Cruz-Uribe [4] về bài toán tìm thể tích lớn nhất của khối hộp và các kết quả của R.H. Buchholz và J.A. MacDougall [2] về phân loại một số đa thức nguyên có bậc $3, 4$ hoặc 5 và dạng đặc biệt sao cho đa thức đó và các đạo hàm của nó có nghiệm hữu tỷ.

Luận văn gồm hai chương. Chương 1 trình bày các kết quả của G. Convertito và D. Cruz-Uribe [4] về bài toán tìm thể tích lớn nhất của khối hộp. Cụ thể tiết 1.1 giới thiệu bài toán chiếc hộp và liên hệ đến nghiệm của một phương trình Diophantine. Tiết 1.2 trình bày một số kết quả về nghiệm của một phương trình Diophantine dùng để đưa ra câu trả lời cho bài toán chiếc hộp (Định lý 1.2.7).

Chương 2 trình bày các kết quả của R.H. Buchholz-J.A. MacDougall [2] về phân loại một số đa thức nguyên có dạng đặc biệt thỏa mãn đa thức đó và các đạo hàm của nó có nghiệm hữu tỷ khi bậc của các đa thức này là $3, 4$ hoặc 5. Những đa thức nguyên mà đa thức đó và mọi đạo hàm chỉ có nghiệm hữu tỷ được gọi ngắn gọn là đa thức dẫn xuất hữu tỷ. Cụ thể tiết 2.1 trình bày các khái niệm về đa thức dẫn xuất hữu tỷ và phân loại một số đa thức dẫn xuất hữu tỷ. Tiết 2.2 trình bày về đa thức bậc 3 có ba nghiệm phân biệt. Tiết 2.3 trình bày về đa thức bậc 4 có bốn nghiệm phân biệt. Tiết 2.4 trình bày về đa thức bậc 4 là đa thức dẫn xuất hữu tỷ.

Chương 1

Bài toán chiếc hộp và phương trình Diophantine

Mục đích của chương này là trình bày Bài toán chiếc hộp và mối liên hệ với nghiệm của một phương trình Diophantine. Từ đó đưa ra câu trả lời cho Bài toán chiếc hộp.

1.1 Bài toán chiếc hộp

Bài toán chiếc hộp là một ví dụ cổ điển về tìm cực trị của đồ thị hàm số và xuất hiện trong nhiều sách về giải tích. Mục đích của tiết này là giới thiệu bài toán chiếc hộp và mối liên hệ của nó đến bài toán cực trị của một hàm số.

Bài toán 1. Cho một tấm bìa hình vuông cạnh $A \in \mathbb{N}$, tại các góc của nó ta cắt bốn hình vuông nhỏ bằng nhau. Sau đó gấp tấm bìa thành một hình hộp với mặt trên hở. Hỏi phải cắt các hình vuông thế nào để thể tích của hình hộp nhận được là lớn nhất?

Thực tế ta có thể ta xét bài toán chặt hơn là phải tìm thể tích lớn nhất sao cho các cạnh của khối hộp là các số hữu tỷ. Vấn đề này dẫn đến bài toán sau.

Bài toán chiếc hộp. Nếu thay tấm bìa hình vuông bằng tấm bìa hình chữ nhật có các cạnh là $A, B \in \mathbb{N}$ thì phải chọn A, B như nào để thể tích khối hộp là lớn nhất với các kích thước các cạnh là số hữu tỷ?

Định nghĩa 1.1.1. Với mỗi cặp số nguyên dương A, B thỏa mãn Bài toán chiếc hộp ta gọi tỷ số A/B là một nghiệm hữu tỷ của Bài toán chiếc hộp.

Xét hình chữ nhật với kích thước A, B, $A \geq B > 0$. Khi đó, việc tìm cực đại của thể tích khối hộp dẫn đến bài toán tìm cực trị của đa thức bậc 3

$$V = x\left(2x - A\right)\left(2x - B\right), 0 < x < \frac{B}{2} \; .$$

Vì tìm cực đại V cũng tương đương việc tìm cực đại của $2V$, nên ta có thể thay x bằng $2x$. Do đó bài toán chính là tìm cực trị của hàm số

$$y = x\left(x - A\right)\left(x - B\right) \; . \tag{1.1}$$

Bài toán chiếc hộp chỉ cần giả thiết rằng A, B là dương. Tuy nhiên, ta có thể xét A, B là các số nguyên. Tổng quát hơn ta xét hàm

$$y = x\left(x^m - A\right)\left(x^m - B\right) = x^{2m+1} - \left(A + B\right)x^{m+1} + ABx,\; A,\; B \in \mathbb{Z} \; . \tag{1.2}$$

Các đa thức có dạng (1.2) được gọi ngắn gọn là các đa thức 3-nhân tử. Về mặt hình học, đồ thị của các đa thức (1.2) tùy thuộc vào tính chẵn lẻ của m và dấu của A, B. Chẳng hạn khi $m = 2$, nếu $A, B > 0$ thì đồ thị cắt trục hoành tại 5 điểm phân biệt; nếu $B < 0 < A$ thì đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm và có 3 điểm uốn liên tiếp.

Để thuận tiện cho việc trình bày ta cần khái niệm sau.

Định nghĩa 1.1.2. Một nghiệm của một phương trình được gọi là nghiệm kiểu $m-$hữu tỷ nếu nó là căn bậc m của một số nguyên.

Vì bài toán là tìm cực trị của đa thức nên ta cần tìm các giá trị của A, B để các đạo hàm bậc nhất và bậc 2 của các đa thức dạng (1.2) cũng có các nghiệm kiểu $m-$hữu tỷ.

Xét đa thức

$$y = x\left(x^m - A\right)\left(x^m - B\right) = x^{2m+1} - (A+B)\,x^{m+1} + ABx,\ A,\ B \in \mathbb{Z}\ .$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (2m+1)x^{2m} - (A+B)(m+1)x^m + AB, \\ \frac{d^2y}{d^2x} &= 2m(2m+1)x^{2m-1} - m(A+B)x^{m-1} \\ &= x^{m-1}(2m(2m+1)x^m - m(A+B)). \end{aligned}$$

Do đó $\dfrac{d^2y}{d^2x} = 0$ có nghiệm là $x = 0$ hoặc là căn bậc m của một số hữu tỷ. Hơn nữa, đạo hàm bậc một là một đa thức bậc hai theo x^m nên nghiệm của nó sẽ là căn bậc m của một số hữu tỷ khi phương trình bậc hai này có nghiệm hữu tỷ.

Giả sử phương trình $\dfrac{dy}{dx} = 0$ có nghiệm. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} x^m =& \frac{(A+B)(m+1)}{2(2m+1)} \\ &\pm \frac{\sqrt{(m+1)^2A^2 + (2m^2-4m-2)AB + (m+1)^2B^2}}{2(2m+1)}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Do đó x^m là hữu tỷ nếu biểu thức

$$\sqrt{(m+1)^2A^2 + (2m^2-4m-2)AB + (m+1)^2B^2}$$

là số hữu tỷ. Chia biểu thức trong căn cho B^2 thì biểu thức trong dấu căn là

$$(m+1)^2\frac{A^2}{B^2} + (2m^2-4m-2)\frac{A}{B} + (m+1)^2. \tag{1.4}$$

Biểu thức (1.4) là bình phương một số hữu tỷ khi và chỉ khi tồn tại các số nguyên dương $f, g \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\gcd(f,g) = 1$ và[1]

$$(m+1)^2\frac{A^2}{B^2} + (2m^2-4m-2)\frac{A}{B} + (m+1)^2 - \frac{f^2}{g^2} = 0. \tag{1.5}$$

[1] $\gcd(f,g)$ là ước chung lớn nhất của f và g.

Áp dụng công thức nghiệm cho phương trình bậc hai ta thu được

$$\begin{aligned}\frac{A}{B} =&\frac{1+2m-m^2}{(m+1)^2}\\ &\pm\frac{\sqrt{(m^2-2m-1)^2-(m+1)^2[(m+1)^2-\frac{f^2}{g^2}]}}{(m+1)^2}.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Vế phải của (1.6) là số hữu tỷ khi tồn tại $p, q \in \mathbb{N}$ nguyên tố cùng nhau thỏa mãn

$$(m+1)^2\frac{f^2}{g^2} - 4m^2(2m+1) = \frac{p^2}{q^2},$$

hay $p^2g^2 + 4(2m+1)m^2g^2q^2 = q^2f^2(m+1)^2$. Điều này có nghĩa là nếu nghiệm của phương trình $\dfrac{dy}{dx} = 0$ là $m-$hữu tỷ thì ta có 1 nghiệm của phương trình Diophantine

$$a^2 + (2m+1)b^2 = c^2;\ a,\ b,\ c \in \mathbb{N}. \tag{1.7}$$

Vì vậy việc tìm cực trị của bài toán sẽ dẫn đến tìm nghiệm của phương trình Diophantine (1.7). Vấn đề này sẽ được trình bày trong mục tiếp theo.

1.2 Liên hệ với nghiệm của phương trình Diophantine

Xét phương trình Diophantine tổng quát

$$a^2 + kb^2 = c^2, k, a, b, c \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

Phương trình này được nghiên cứu từ lâu và có một lịch sử rất phong phú. Ở Nhật Bản, phương trình này được Matunaga nghiên cứu vào nửa đầu thế kỷ 18. Một dạng tổng quát hơn của phương trình này được nghiên cứu sớm hơn một chút ở Châu Âu, tầm đầu thế kỷ 18, bởi nhiều nhà toán học bao gồm Lagrange, Euler, Minding và Dirichlet.

Trong phần tiếp theo ta tìm tất cả các nghiệm nguyên (a, b, c) của phương trình (1.8) thỏa mãn a, b, c nguyên tố cùng nhau. Để tiện cho việc trình bày một nghiệm (a, b, c) của phương trình (1.8) thỏa mãn a, b, c nguyên tố cùng nhau được gọi ngắn gọn là một bộ ba nguyên thủy. Khi đó ta có kết quả quan trọng sau.

Định lý 1.2.1. *Cho* $k \in \mathbb{N}$ *và* u, v *là các số nguyên dương thỏa mãn* $\gcd(u, v) = 1, u \geq \dfrac{v}{\sqrt{k}}$. *Gọi* r *là ước chung lớn nhất của* $ku^2 - v^2$ *và* $2uv$. *Khi đó*

$$a = \frac{ku^2 - v^2}{r},\ b = \frac{2uv}{r},\ c = \frac{ku^2 + v^2}{r}$$

là tất cả các bộ ba nguyên thủy của phương trình (1.8).

Chứng minh. Giả sử (a, b, c) là một bộ ba nguyên thủy của phương trình (1.8). Khi đó

$$a^2 + kb^2 = c^2,$$

nghĩa là

$$c^2 - a^2 = kb^2.$$

Khẳng định này tương đương với

$$(c - a)(c + a) = kb^2. \tag{1.9}$$

Vì $a \neq c$ và $k, b \neq 0$ nên từ phương trình (1.9) ta có

$$\frac{c + a}{kb} = \frac{b}{c - a}\ .$$

Gọi $u, v \in \mathbb{N}$, $\gcd(u, v) = 1$ sao cho:

$$\frac{u}{v} = \frac{c + a}{kb} = \frac{b}{c - a}. \tag{1.10}$$

Từ phương trình (1.10) bằng tính toán đơn giản ta có

$$\begin{cases} \dfrac{ku}{v} & = \dfrac{c + a}{b} = \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{b} \\ \dfrac{v}{u} & = \dfrac{c - a}{b} = \dfrac{c}{b} - \dfrac{a}{b} \end{cases}$$

Do đó,

$$\frac{c}{b} = \frac{ku^2 + v^2}{2uv}; \ \frac{a}{b} = \frac{ku^2 - v^2}{2uv}.$$

Khẳng định này kéo theo $u \geq \frac{v}{\sqrt{k}}$. Bây giờ ta đặt r là ước chung lớn nhất của $ku^2 - v^2$ và $2uv$. Dễ dàng suy ra rằng $r = \gcd(2uv;\ ku^2 + v^2)$. Do đó ta thu được

$$a = \frac{ku^2 - v^2}{r},\ b = \frac{2uv}{r},\ c = \frac{ku^2 + v^2}{r}\ . \tag{1.11}$$

Ngược lại, với $u, v \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $\gcd(u, v) = 1$ và $u \geq \frac{v}{\sqrt{k}}$, ta định nghĩa r như trong công thức (1.11). Khi đó dễ dàng chứng minh (a, b, c) là một bộ ba nguyên thủy của phương trình (1.8). Do đó biểu thức (1.11) biểu diễn toàn bộ số nghiệm nguyên thủy của phương trình (1.8) . □

Trong kết quả của Định lý 1.2.1 ta thấy r chỉ có thể lấy trên một giới hạn các giá trị. Khi $k \equiv 1, 2, 3 \pmod 4$ chúng ta thu được định lý sau. Để tiện cho việc trình bày ta kí hiệu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ là ước chung lớn nhất của $a_1, a_2, \ldots, a_n$ với mọi số nguyên dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $n \geq 2$.

Định lý 1.2.2. *Cho* $k \equiv 1, 2, 3 \pmod 4$ *và các số tự nhiên* u, v *như trong Định lý 1.2.1. Khi đó hoặc* $r = (v, k)$ *hoặc* $r = 2(v, k)$*. Hơn nữa, giá trị của* r *phụ thuộc vào tính chẵn lẻ của* u, v *cho bởi bảng sau*

	$k \equiv 1$	$k \equiv 2$	$k \equiv 3$
u, v đều lẻ	$2(v, k)$	(v, k)	$2(v, k)$
u lẻ, v chẵn	(v, k)	(v, k)	(v, k)
u chẵn, v lẻ	(v, k)	(v, k)	(v, k)

Chứng minh. Trước tiên, ta cần chứng minh r chỉ có 2 giá trị là (v, k) hoặc $2(v, k)$. Ta định nghĩa k_0, v_0 bởi các đẳng thức $k = k_0(v, k)$ và $v = v_0(v, k)$. Dễ dàng chứng minh rằng $(v_0, k_0) = 1$. Do đó

$$r = (k_0(v, k)u^2 - v_0^2(v, k)^2, 2uv_0(v, k), k_0(v, k)u^2 + v_0^2(v, k)^2). \tag{1.12}$$